**Ternaire logica**

1. Achtergrond en bedoeling

Ternaire logica is een vorm van logica waarin formules drie verschillende waardes kunnen hebben: waar (+), onwaar (-) of onbekend (0). Deze laatste waarde wordt toegekend aan termen waarvan men de finale waarde nog niet kent, maar dat betekent niet dat men er niet over kan redeneren. Bijvoorbeeld, de waardering x = + en y = 0 van de formule x ∨ y resulteert in de waarde +, aangezien de de uiteindelijke waarde van y zowel – of + kan zijn, en zowel + ∨ – en + ∨ + resulteert in + **[1]**. Ternaire logica werd uitgebreid omschreven door Jan Łukasiewicz in 1920, en vormt de basis voor de studie van meerwaardige logica **[2, 3]**. Figuur 1 is de waarheidstabel voor de connectieven negatie, disjunctie, conjunctie, implicatie en equivalentie, vanuit bron **[4]** :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **¬p** | **p ∨ q** | **p ∧ q** | **p → q** | **p ↔ q** |
| + | + | – | + | + | + | + |
| + | 0 | – | + | 0 | 0 | 0 |
| + | – | – | + | – | – | – |
| 0 | + | 0 | + | 0 | + | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | + | + |
| 0 | – | 0 | 0 | – | 0 | 0 |
| – | + | + | + | – | + | – |
| – | 0 | + | 0 | – | + | 0 |
| – | – | + | – | – | + | + |

*Figuur 1: Waarheidstabel voor ternaire logica uit bron* ***[4]***

1. Relevantie van ternaire logica
   1. *Structured Query Language*

De database querytaal SQL gebruikt ternaire logica om om te gaan met onbekende waardes (= NULL waardes) in tabelrijen. Bij het queryen van een tabel wordt met deze waarde rekening gehouden en wordt zonodig de logische waarde UNKNOWN teruggegeven: de waarde is onbekend en *kan* (maar misschien ook niet!) dus wel eens overeenkomen met de query als hij ingevuld zou zijn geweest **[1, 5]**. Figuur 2 geeft een kort voorbeeld:

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabelwaarde** | **Resultaat** |
| Amsterdam | FALSE |
| Utrecht | TRUE |
| NULL | UNKNOWN |

*Figuur 2: Waarheidstabel voor de SQL-expressie “ naam = ‘Utrecht’ ”*

De modellingswaarde hiervan ligt echter onder vuur: zowel C. J. Date als H. Darwen hebben hun kritiek hierover uitgesproken en hebben alternatieven voorgesteld **[5, 6]**.

* 1. *Ternaire computers*

Hoewel ternaire computers zo goed als uitgestorven zijn, zijn ze weldegelijk onderzocht geweest: De Russiche Setun computer was gebaseerd op ternaire logica, mede omdat ternaire logica efficiënter is voor het opslaan van cijfers **[7, 8]**. Gelijkaardige binaire computers kostten bijna 2,5 keer zoveel als hun ternaire equivalenten en verbruikten meer energie **[9, 10]**.

1. Tautologieën in ternaire logica

Sommige tautologieën en axioma’s uit de binaire logica zijn dit niet in de ternaire logica, terwijl anderen nog steeds geldig blijven, zoals zichtbaar in figuur 3, 4 en 5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p → (q → p)**  ***(axioma 1)*** | **(¬p → ¬q) → (q → p)**  ***(axioma 3)*** | **(p ∧ (p → q)) → q**  ***(modus ponens)*** | **(p ∧ ¬p) → q**  ***(standaardtautologie)*** |
| + | + | + | + | + | + |
| + | 0 | + | + | + | + |
| + | – | + | + | + | + |
| 0 | + | + | + | + | + |
| 0 | 0 | + | + | 0 | + |
| 0 | – | + | + | – | 0 |
| – | + | + | + | + | + |
| – | 0 | + | + | 0 | + |
| – | – | + | + | – | + |

*Figuur 3: Enkele axioma’s, modus ponens en een standaardtautologie van de klassieke propositielogica met ternaire logica*

**(p → ( q → z)) → ((p → q) → (p → z)) *(axioma 2)***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **z** | **q → z**  **= A** | **p → A**  **= B** | **p → q**  **= C** | **p → z**  **= D** | **C → D**  **= E** | **B → E** |
| + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| + | + | 0 | 0 | 0 | + | 0 | 0 | + |
| + | + | – | – | – | + | – | – | + |
| 0 | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| 0 | 0 | 0 | + | + | + | + | + | + |
| 0 | 0 | – | 0 | + | + | 0 | 0 | 0 |
| – | – | + | + | + | + | + | + | + |
| – | – | 0 | + | + | + | + | + | + |
| – | – | – | + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| + | 0 | + | + | + | 0 | + | + | + |
| + | – | + | + | + | – | + | + | + |
| 0 | + | 0 | 0 | + | + | + | + | + |
| 0 | 0 | 0 | + | + | + | + | + | + |
| 0 | – | 0 | + | + | 0 | + | + | + |
| – | + | – | – | + | + | + | + | + |
| – | 0 | – | 0 | + | + | + | + | + |
| – | – | – | + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| 0 | + | + | + | + | + | + | + | + |
| – | + | + | + | + | + | + | + | + |
| + | 0 | 0 | + | + | 0 | 0 | + | + |
| 0 | 0 | 0 | + | + | + | + | + | + |
| – | 0 | 0 | + | + | + | + | + | + |
| + | – | – | + | + | – | – | + | + |
| 0 | – | – | + | + | 0 | 0 | + | + |
| – | – | – | + | + | + | + | + | + |

*Figuur 4: Axioma 2 van de klassieke propositielogica met ternaire logica*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **p ∨ ¬p** | **p ↔ ¬¬p** |
| + | + | + |
| 0 | 0 | + |
| – | + | + |

*Figuur 5: Enkele standaardtautologieën*

Tautologieën zijn dus moeilijker te verkrijgen in ternaire logica, en contradicties nog moeilijker **[4]**, maar een naamverandering lijkt niet aan de orde.

1. Meerwaardige logica’s

De meest bekende meerwaardige (oneindig-waardige, zelfs) klasse van logica’s is fuzzy logic, waarbij de waarde van een term tussen 0 en 1 ligt. Deze vorm van logica werd door velen onderzocht wanneer Lotfi Zadeh zijn fuzzy set theorie publiceerde in 1965 **[11]**. De klasse omvat zowel propositionele als predicaatlogica’s. Fuzzy logic gebruikt fuzzy set theorie om overgangen tussen waardes gedetailleerd weer te geven, of anders gezegd, om percentages van waarheid weer te geven. Figuur 6 geeft het verschil weer tussen beide:

|  |  |
| --- | --- |
| Klassieke propositielogica | (Het glas is vol) ∧ ¬(Het glas is vol) |
| Fuzzy logic | 50% (Het glas is vol) ∧ 50% ¬(Het glas is vol) |

*Figuur 6: Verschil tussen klassieke propositielogica en fuzzy logic*

Deze klasse van logica’s wordt gebruikt in verschillende beslissingssystemen, waaronder medische diagnoseringssystemen en fraudedetectie **[12]** en gelijkaardige expertsystemen **[13]**, zoals decision support systemen **[14, 15]**.

1. Toekomstig potentiaal

Hoewel pure (=’crisp’) ternaire logica momenteel bitter weinig gebruikt wordt vergeleken met fuzzy logic, is er misschien verbetering op komst. Wegens de voortdurende miniaturisatie worden de fysieke beperkingen van microchips (hitteproductie, “lekkende” circuits, steeds ingewikkeldere siliconwaferproductieprocédés) steeds duidelijker en storender. Men onderzoekt vele alternatieven voor de toekomst, en quantum computers zijn een erg veelbelovende richting.

Qubits zijn de bits in een quantum computer, en quantum dots zijn (reeds lang bekende) halfgeleiders waarmee men qubits wil maken **[16]**. Efficiëntie is echter het grootste probleem; grote quantum computers zijn mogelijk in theorie, maar tot nu toe groeit de grootte met mondjesmaat. Ternaire logica kan echter een nodige boost geven in deze efficiëntie door ternaire quantum dots te ontwerpen: men heeft reeds qutrits ontworpen en succesvol getest **[17, 18].**

Wegens de werking van quantum computers is de opslagruimte die *n* qutrits kunnen geven 3n (qubits geven 2n, conventionele computers 1n ) , en het is mogelijk dat men andere elementen zoals atomen, ionens of fotonen als basis gebruiken zal wegens hun nog hogere dimensiecapaciteiten [**18,19]**. Meerwaardige logica kan dan opeens een heropleving kennen die niet is gezien sinds de ontdekking ervan.oHoe

1. Wikipedia community. (23 december 2010). “Ternary Logic”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Ternary_logic>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
2. Wikipedia community. (4 september 2010). “Multi-valued logic”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Multi-valued_logic>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
3. Anoniem. (24 april 2009). “Jan Łukasiewicz”, <http://planetphysics.org/encyclopedia/JanLukasiewicz.html> , geconsulteerd op 16 januari 2011.
4. Arpasi J. (7 november 2003). “A Brief Introduction to Ternary Logic”, <http://www.fw.uri.br/~arpasi/artigos/ternary.pdf>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
5. Wikipedia community. (28 december 2010). “Null (SQL)”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Null_(SQL)>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
6. C2 Wiki community. (31 juli 2010). “Three Valued Logic”, <http://c2.com/cgi/wiki?ThreeValuedLogic>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
7. Wikipedia community. (24 juli 2010). “Radix economy”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Radix_economy>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
8. Wikipedia community. (23 november 2010). “Ternary numeral system”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Ternary_numeral_system#Practical_usage>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
9. Wikipedia community. (29 juli 2010). “Setun”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Setun>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
10. Wikipedia community. (13 januari 2011). “Ternary computer”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Ternary_computer>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
11. Wikipedia community. (13 januari 2011). “Fuzzy logic”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
12. Lotfi A. Zadeh. (2008). “Fuzzy logic”, <http://www.scholarpedia.org/article/Fuzzy_logic>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
13. Kaufmann M., Tobias S., Schulin R. (2009). “Quality evaluation of restored soils with a fuzzy logic expert system”, <http://www.pedometrics.org/pm/wp-content/uploads/2010/07/kaufman.pdf>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
14. Metaxiotis K., Psarras J., Samouilidis J-E. (2004). “New applications of fuzzy logic in decision support systems”, <http://www.inderscience.com/search/index.php?action=record&rec_id=5008>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
15. Rommelfanger H. (2001). “Fuzzy Logic Based Decision Support Systems”, <http://www.eusflat.org/publications/proceedings/EUSFLAT_2001/papers/305_Rommelfanger.pdf>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
16. Wikipedia community. (11 januari 2011). “Quantum dot”, <http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_dot>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
17. Bajec I., Zimic N., Mraz M. (2006). “The ternary quantum-dot cell and ternary logic”, <http://lrss.fri.uni-lj.si/people/ilbajec/papers/ilb_nt06.pdf>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
18. Zyga S. (26 februari 2008). “Physicists Demonstrate Qubit-Qutrit Entanglement“, <http://www.physorg.com/news123244300.html>, geconsulteerd op 16 januari 2011.
19. Lanyon B.P., Barbieri M., Almeida M.P., Jennewein T., Ralph T.C., Resch K.J., Pryde G.J., O’Brien J.L., Gilchrist A., White A.G. (2 april 2008). “Quantum computing using shortcuts through higher dimensions“, <http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0804/0804.0272v1.pdf>, geconsulteerd op 16 januari 2011.